

标准正则化理论的一些推广和应用

杨智勇 马颂德

(中国科学院自动化研究所模式识别国家重点实验室,北京 100080)

摘要 在标准正则化理论中建议一类局部相互作用场和自适应正则项。局部相互作用场包括通常的误差项和—窗口函数。窗口的大小,取向和形状可以视具体的应用加以调整。自适应正则项用来处理不连续变化。这两项导致—对称的能量泛函。最简单的梯度下降算法通常在参数变化和有噪声时也很稳定,有效。

关键词 正则化理论,局部相互作用场,自适应正则项,视觉表示,表面重构,图象光滑

1 引言

科学和工程中有大量的不适定问题。正则化理论是求解这类问题的有力工具^[1]。正则化理论已成为早期视觉的一个统一框架^[2],并已用于中—高级视觉的许多问题。最近发现正则化理论与另一广泛用于图象,语音处理的工具——Markov 随机场有密切的联系^[3]。由正则化理论诱导的正则化网络已成为重要的网络模型,甚至被建议为脑工作的模块^[4]。本文针对视觉表示、表面重构、图象光滑,指出了在通常的正则化理论中存在的一些问题并提出一些推广。这些推广会在一些概念和计算上带来好处。

2 局部相互作用场

从已知数据 $\{(x_1, y_1, f_1), (x_2, y_2, f_2), \dots, (x_n, y_n, f_n)\}$ 重构—表面 $f(x, y)$, 利用正则化理论优化以下能量泛函

$$H = U + E \quad (1)$$

U 是重构的表面与已知数据点的相互作用, E 是光滑项。在通常的正则化理论中

$$U = \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i) - f_i)^2 \quad (2)$$

$$E = \frac{K_1}{2} \int (\nabla f)^2 dx dy + \frac{K_2}{2} \int (\nabla^2 f)^2 dx dy \quad (3)$$

K_1, K_2 为大于零的常数。我们注意到式(2), (3)之

间存在明显的不对称;式(2)是一 δ 相互作用,而式(3)是一个点与其邻域的相互作用。为消除这一不对称性,我们提出一类新的相互作用。我们建议重构的表面 $f(x, y)$ 与已知数据点 (x_i, y_i, f_i) 的相互作用 U_i 为:

$$U_i = \int (f(x, y) - f_i)^2 \times W(x, y, x_i, y_i) dx dy \quad (4)$$

$W(x, y, x_i, y_i)$ 为一随距离 $|x - x_i|, |y - y_i|$ 单调递减的窗口函数,并满足

$$\lim_{|x-x_i| \rightarrow \infty} W(x, y, x_i, y_i) = 0,$$

$$\lim_{|y-y_i| \rightarrow \infty} W(x, y, x_i, y_i) = 0$$

每个窗口具有一定的大小,且可有各种取向和形状,可视具体的应用加以调整。这一相互作用项带来以下好处:

(1) 能量泛函式(1)在概念上是对称的;(2) $w(x, y, x_i, y_i)$ 可视具体的应用调整大小,取向和形状;(3) 通常的疏/密数据的划分得到了一种意义。如果已知数据集的窗口能够覆盖整个考虑的 XY 平面,那么已知数据是密集的;相反,则是稀疏的。

3 自适应正则项

存在不连续变化时,式(3)将发散,这在能量上很不利。因此,式(3)会导致过分光滑^[3]。为了在应用光滑性约束的同时,保持不连续性,我们引入自适应

正则项

$$E = \frac{K_1}{2} \int g(\nabla f \cdot \nabla f) dx dy + \frac{K_2}{2} \int h(\nabla^2 f \cdot \nabla^2 f) dx dy \quad (5)$$

$$g_\sigma(\infty) = \text{const}, h(\infty) = \text{const}, h_\sigma(\infty) = \text{const}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_\sigma(x)}{\partial x} > 0, \frac{\partial^2 g_\sigma(x)}{\partial^2 x} < 0 \\ \frac{\partial h(x)}{\partial x} > 0, \frac{\partial^2 h(x)}{\partial^2 x} < 0 \\ \frac{\partial h_\sigma(x)}{\partial x} > 0; \frac{\partial^2 h_\sigma(x)}{\partial^2 x} < 0, x > 0; \\ \frac{\partial^2 h_\sigma(x)}{\partial^2 x} > 0, x < 0; \sigma = 1, 2 \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $h_\sigma(x)$ 为曲率正则化项。由于高斯曲率既可能为正也可能为负,因此 $h_\sigma(x)$ 的条件与上两项略有不同。

const 为大于零的常数。 $g(x), h(x)$ 趋于饱和的速度及其具体形式可根据具体应用设计。

针对重构三维空间中的二维表面,我们还建议以下的正则项

$$E = \frac{K_1}{2} \int g((c_1 + c_2/2)^2) dx dy + \frac{K_2}{2} \int h(c_1 c_2) dx dy \quad (7)$$

c_1, c_2 是主曲率, $\frac{c_1 + c_2}{2}, c_1 c_2$ 分别是平均曲率和高斯曲率。 $g(x)=x, h(x)=x$ 时,方程(7)便是在生物膜和微管形状研究中起重要作用的能量泛函。

4 实验结果

以上建议的正则化方案可用于视觉表示、表面重构、图象光滑、非线性回归。这里,我们给一些简单的实验结果。

4.1 一维非线性回归

这时方程(3),(4),(7)分别为

$$E = \frac{K_1}{2} \int (\nabla f)^2 dx + \frac{K_2}{2} \int (\nabla^2 f)^2 dx \quad (8)$$

$$U_i = \int (f(x) - f_i)^2 \times W(x, x_i) dx \quad (9)$$

$$E = \frac{K}{2} \int g(c^2) dx \quad (10)$$

离散化 X 轴,并设其指标为 i 。设在 i_0 点有一已知数据,窗口函数取为

$$W(i, i_0) = \begin{cases} u_1, & i = i_0 \\ u_2, & i = i_0 \pm 1 \\ u_3, & i = i_0 \pm 2 \\ 0, & |i - i_0| \geq 3 \end{cases} \quad u_1 > u_2 > u_3 > 0 \quad (11)$$

我们选用最简单的梯度下降算法,

$$f(x_i, t + 1) = f(x_i, t) - l_c \times \frac{\partial}{\partial f} H(f, t) \quad (12)$$

$l_c > 0$ 是学习常数。误差准则是均方根距离

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_i (f^\infty - f_i)^2}{n}} \quad (13)$$

f^∞ 是得到的结果, f_i 是已知数据或期望的结果。

图 1 中的数据点是在一半圆上加随机噪声产生的。我们取式(10)为正则项, $g(c^2) = c^2$ 。 $K = 0.45$, $l_c = 0.015$, $u_2 = 1, u_3 = 0.6, u_3 = 0.2$ 。得到的曲线与原来的半圆非常接近。 $SD = 0.01491$ 。

图 2 中的数据点是在一有尖点的曲线上加随机

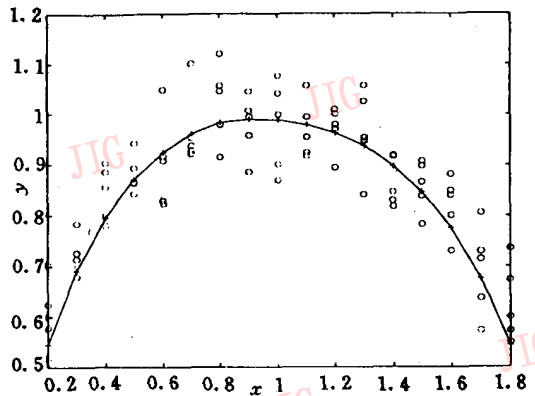


图 1 从数据点(“o”)中构造出的一条光滑曲线(“+”)

Fig. 1 A smooth curve (“+”) constructed from input data (“o”)

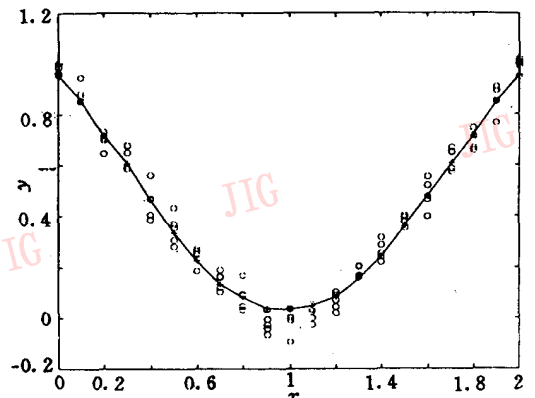


图 2 从数据点(“o”)中构造出的一条光滑曲线(“+”)

Fig. 2 A smooth curve (“+”) constructed from input data (“o”)

噪声产生的。取式(11)为正则项, $g(c^2)=c^2$ 。 $K=0.1, l_c=0.002, x=1.3, 1.7, u_1=2.2, u_2=0.7, u_3=0.2$ 。 $x=1.4, 1.6, u_1=2.6, u_2=0.8, u_3=0.3$ 。 $x=1.5, u_1=3, u_2=0.8, u_3=0.3$ 。 $u_1=2, u_2=0.6, u_3=0.1$ 。 $SD=0.0164$ 。尽管我们已在尖点附近调整了窗口函数,尖点仍是难以恢复。在其它方法中,尖点也是难以恢复。

4.2 表面插值和表面光滑

离散化 XY 平面。其指标为 (i, j) 。任一点 (i_0, j_0) 处的窗口函数取为

$$W(i, j, i_0, j_0) = \begin{cases} u_1, & i = i_0, j = j_0 \\ u_2, & |i - i_0| + |j - j_0| = 1 \\ u_3, & |i - i_0| + |j - j_0| = 2 \\ 0, & |i - i_0| + |j - j_0| \geq 3 \end{cases} \quad (14)$$

$$u_1 > u_2 > u_3 > 0$$

图3右为一表面插值结果。图3左是原始数据。选

式(3)为正则项。 $K_1=0.0002, K_2=0.0001, l_c=0.002-0.02$ 。在 $(0,0), (0,0.1), (0.1,0), (0.1,0.1)$ 处,取 $u_1=5, u_2=2, u_3=1$ 以减小边界效应。在其它点 $u_1=2, u_2=0.8, u_3=0.1$ 。已知数据从一高斯曲面采取。初始曲面是两个指数函数的乘积。 $SD=0.0178$ 。图4为一表面光滑结果,选式(3)为正则项。 $l_c=0.001-0.005, u_1=1, u_2=0.6, u_3=0.1, SD=0.00148$ 。我们指出以下几点

(1) 在所有这些实验中,当用通常的误差项而不是这里的局部相互作用场时,我们发现算法很难收敛。因此,局部相互作用场是非常有效的。

(2) 正则平面曲线和曲面只有少数几种局部结构,当适当调整窗口函数适应这些局部结构,通常的梯度下降算法很有效。

(3) 学习常数也可以调整。例如, SD 较大时取较小的学习常数; SD 较小时取较大的学习常数。我们发现 SD 较大时取较大的学习常数会导致发散或振荡。

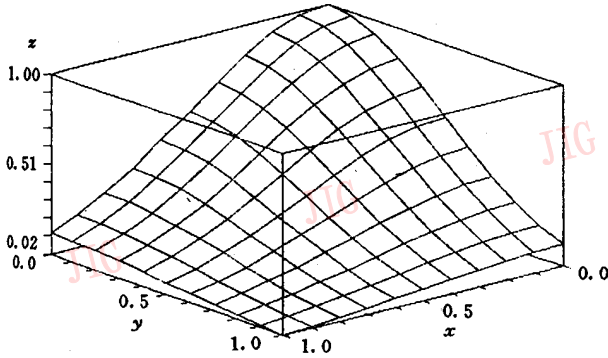
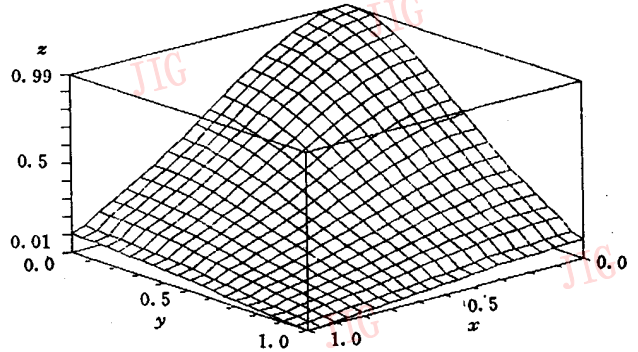


图3 一个高斯曲面

Fig. 3 A Gaussian surface.



由左图内插得到的高斯曲面

A Gaussian surface interpolated from input left

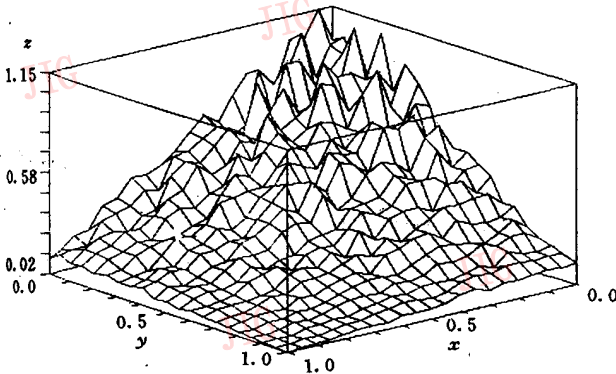
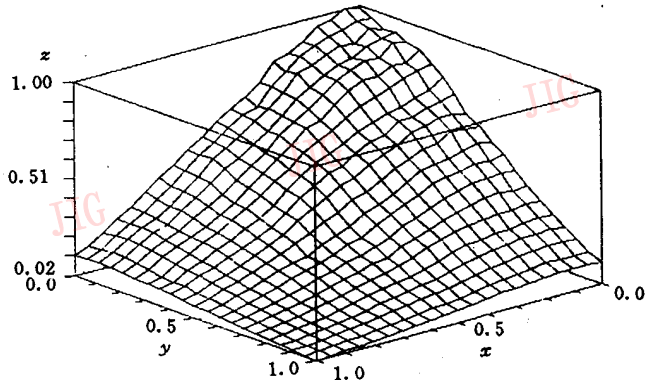


图4 一个有噪声的曲面

Fig. 4 A surface with noises.



由左图得到的光滑曲面

A smooth surface obtained from input left

5 结 语

我们在标准正则化理论中建议一类局部相互作用场和自适应正则项。实验证明这些带来一些计算上的好处:稳定,简单的算法,解的容错性和对参数,噪声的稳定性。局部相互作用场和自适应正则项导致一对称的能量泛函。窗口函数类似神经生物学中的感受野,局部相互作用场比目前广泛使用 δ 的相互作用更有神经生物学意义,也更适于各种视觉问题。这里的方法也对科学和工程中大量的不适定问题有用。局部相互作用场和自适应正则项均可视具

体的应用调整以获得好的解。

参 考 文 献

- 1 Tikhonov A N, Arsenin V Y. Solutions of ill-posed problems. V. H. Winston & Sons 1977.
- 2 Poggio T, Torre V, Koch C. Computational Vision and Regularization Theory. Nature, 1985, 317: 314~319.
- 3 Li S Z. Markov Random Field Modeling in Computer Vision, Springer-Verlag 1995.
- 4 Poggio T. A theory of how the brain might work. in: Cold Spring Harbor Sym. on Quantitative Bio. Cold Spring Harbor Lab Press, 1990, 978~982.



杨智勇, 1994年进入中科院自动化所模式识别实验室, 攻读计算机视觉和计算机图形的博士学位。发表论文20余篇。研究兴趣是视觉计算理论、脑理论和模型。



马颂德, 1946年生, IEEE高级会员, 1968年毕业于清华大学, 1986年获法国国家博士学位, 现为中科院自动化所所长, 模式识别国家重点实验室主任, 博士生导师, 长期从事计算机视觉、模式识别和图象处理等方面的研究工作。

Some Generalizations And Applications of Standard Regularization Theory

Yang Zhiyong, Ma Songde

(National Laboratory of Pattern Recognition Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract A set of local interaction field and adaptive regularizers are introduced to usual regularization theory. A local interaction field consists of a usual error term and a window function. The sizes, orientations and shapes of window functions can be made adaptive to specific applications. Adaptive regularizers are used to handle discontinuities. These two terms lead to a symmetrical energy functional. Even the simplest gradient algorithm is effective and stable when there are noises or algorithmic parameters change.

Keywords Regularization theory, Local interaction field, Adaptive regularizers, Visual representation, Surface reconstruction, Image smoothing